युक्लिड की ज्यामिति का परिचय

कक्षा 9 — गणित (Introduction to Euclid's Geometry)

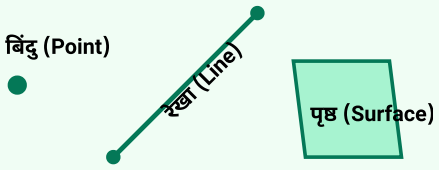
शिक्षक: अनुपम कुमार

विषय: गणित (Chapter 5)

विद्यालय: उच्च माध्यमिक विद्यालय मंझरिया, गौनाहा

जिला: पश्चिम चंपारण

1. मूलभूत परिभाषाएँ (BASIC DEFINITIONS)



ग्रीक गणितज्ञ **युक्लिड (Euclid)** ने मिस्र के अलेक्जेंड्रिया में 'Elements' नामक प्रसिद्ध ग्रंथ में ज्यामिति को सुव्यवस्थित किया।

- **बिंदु (Point):** वह जिसका कोई भाग नहीं होता (no dimension)।
- **रेखा (Line):** चौड़ाई-रहित लंबाई (breadthless length)।
- **पृष्ठ (Surface):** वह जिसकी केवल लंबाई और चौड़ाई होती है।

2. युक्लिड की अभिगृहीत (EUCLID'S AXIOMS)

अभिगृहीत वे सर्वव्यापी सत्य कथन हैं जिन्हें बिना प्रमाण के स्वीकार किया जाता है (यह संपूर्ण गणित में लागू होते हैं):

अभिगृहीत 1: वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, एक-दूसरे के बराबर होती हैं (यदि A = C और B = C, तो A = B)।

अभिगृहीत 2: यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं (यदि A = B, तो A + C = B + C)।

अभिगृहीत 3: यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं (यदि A = B, तो A − C = B − C)।

अभिगृहीत 4: वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती (coincide) हों, एक-दूसरे के बराबर होती हैं।

अभिगृहीत 5: पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है (The whole is greater than the part)।

अभिगृहीत 6: एक ही वस्तुओं के दोगुने परस्पर बराबर होते हैं (यदि A = B, तो 2A = 2B)।

अभिगृहीत 7: एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं (यदि A = B, तो A/2 = B/2)।

स्मरण रखें: अभिगृहीत (Axioms) का प्रयोग गणित की प्रत्येक शाखा में होता है, जबकि अवधारणाएँ (Postulates) विशेष रूप से ज्यामिति से संबंधित हैं।

3. युक्लिड की अवधारणाएँ (EUCLID'S POSTULATES)

अधारणाएँ वे आधारभूत सत्य हैं जो विशेष रूप से ज्यामिति (Geometry) से संबंधित हैं:

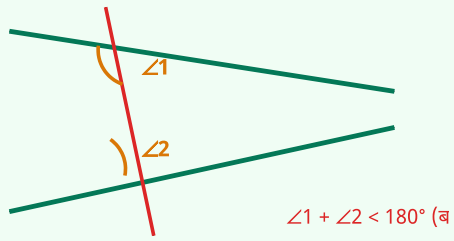
अवधारणा 1: एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

अवधारणा 2: एक शांत रेखा (terminated line / line segment) को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

अवधारणा 3: किसी केंद्र और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

अवधारणा 4: सभी समकोण एक-दूसरे के बराबर होते हैं (90° = 90°)।

अवधारणा 5 (पाँचवीं अवधारणा): यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिरकर अपने एक ही ओर दो अंत:कोण (interior angles) इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोण (180°) से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर यह योग 180° से कम होता है।



5वीं अवधारणा की व्याख्या:

चित्र में बाईं ओर के अंत:कोणों $\angle 1 + \angle 2 < 180^\circ$ है। अत: यदि रेखाओं को आगे बढ़ाया जाए, तो वे उसी दिशा में एक-दूसरे को प्रतिच्छेद (intersect) करेंगी।

4. प्लेफेयर की अभिगृहीत (PLAYFAIR'S AXIOM)

यह युक्लिड की 5वीं अवधारणा का एक तुल्य और सरल रूप है:

कथन (Statement)	निष्कर्ष (Inference)
प्रत्येक रेखा $\mathbf{l}$ और उस पर न स्थित बिंदु $\mathbf{P}$ के लिए, एक अद्वितीय (unique) रेखा $\mathbf{m}$ ऐसी होती है जो $\mathbf{P}$ से होकर जाती है और $\mathbf{l}$ के समांतर होती है।	दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकती हैं।

अभिगृहीत 5.1 (अद्वितीय रेखा): दिए हुए दो भिन्न बिंदुओं से होकर एक और केवल एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

5. महत्वपूर्ण प्रमेय (IMPORTANT THEOREMS)

प्रमेय 5.1 (Theorem 5.1)

कथन: दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ (common) नहीं हो सकता।

उपपत्ति (Proof):

1. माना कि दो भिन्न रेखाएँ $\mathbf{l}$ और $\mathbf{m}$ हैं।
2. हमें सिद्ध करना है कि इनमें केवल एक बिंदु उभयनिष्ठ है।
3. **विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति (Proof by contradiction):** मान लीजिए कि दो रेखाएँ दो भिन्न बिंदुओं $\mathbf{P}$ और $\mathbf{Q}$ पर प्रतिच्छेद करती हैं।
4. इसका अर्थ हुआ कि दो भिन्न बिंदुओं $\mathbf{P}$ और $\mathbf{Q}$ से होकर दो रेखाएँ $\mathbf{l}$ और $\mathbf{m}$ गुजरती हैं।
5. परंतु यह युक्लिड की इस अभिगृहीत के विरुद्ध है कि "दो भिन्न बिंदुओं से केवल एक ही अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।"
6. अतः हमारी मान्यता गलत है। दो भिन्न रेखाओं में **केवल एक ही बिंदु उभयनिष्ठ** हो सकता है। **(इति सिद्धम्)**

6. हल सहित उदाहरण (SOLVED EXAMPLES)

उदाहरण 1:

प्रश्न: यदि बिंदु $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ और $\mathbf{C}$ एक रेखा पर स्थित बिंदु हैं और $\mathbf{B}$ बिंदुओं $\mathbf{A}$ और $\mathbf{C}$ के बीच में स्थित है, तो सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{AB + BC = AC}$.

हल:

1. दी गई आकृति में रेखाखंड $\mathbf{AC}$, दो भागों $\mathbf{AB}$ और $\mathbf{BC}$ से मिलकर बना है।
2. रेखाखंड $\mathbf{AB + BC}$, रेखाखंड $\mathbf{AC}$ के साथ संपाती (coincide) होता है।
3. **युक्लिड की अभिगृहीत 4 के अनुसार:** "वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों, एक-दूसरे के बराबर होती हैं।"
4. अतः, $\mathbf{AB + BC = AC}$. **(सिद्ध हुआ)**

उदाहरण 2:

प्रश्न: सिद्ध कीजिए कि एक दिए गए रेखाखंड पर एक समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle) की रचना की जा सकती है।

हल:

1. माना एक रेखाखंड $\mathbf{AB}$ दिया गया है। अवधारणा 3 के अनुसार, $\mathbf{A}$ को केंद्र और $\mathbf{AB}$ त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचते हैं।
2. पुनः $\mathbf{B}$ को केंद्र और $\mathbf{AB}$ त्रिज्या लेकर दूसरा वृत्त खींचते हैं। माना दोनों वृत्त $\mathbf{C}$ पर काटते हैं।
3. $\mathbf{AC}$ और $\mathbf{BC}$ को मिलाते हैं। त्रिज्याएँ होने के कारण $\mathbf{AB = AC}$ तथा $\mathbf{AB = BC}$.
4. अभिगृहीत 1 के अनुसार, $\mathbf{AC = BC = AB}$. अतः $\mathbf{\Delta ABC}$ एक समबाहु त्रिभुज है।

परीक्षा टिप्स: बोर्ड एवं वार्षिक परीक्षाओं में प्रायः युक्लिड की 5वीं अवधारणा, अभिगृहीत 5 ("पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है") और प्रमेय 5.1 का सिद्धीकरण पूछा जाता है।