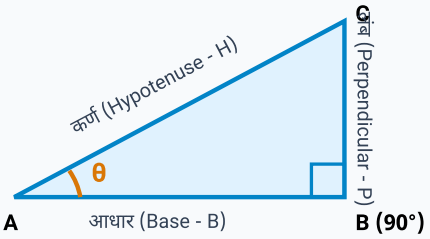
त्रिकोणमिति: संपूर्ण अध्ययन नोट्स

कक्षा 10 — गणित (Trigonometry Complete Notes)

शिक्षक: अनुपम कुमार
विषय: गणित (Chapter 8)
विद्यालय: उच्च माध्यमिक विद्यालय मंझरिया, गौनाहा
जिला: पश्चिम चंपारण

1. त्रिकोणमिति का परिचय (INTRODUCTION)



त्रिकोणमिति गणित की वह शाखा है जिसमें समकोण त्रिभुज की भुजाओं और उनके कोणों के संबंधों का अध्ययन किया जाता है।

- **कर्ण (H):** 90° के सामने वाली सबसे लंबी भुजा।
- **लंब (P):** विचारित कोण (θ) के ठीक सामने वाली भुजा।
- **आधार (B):** कोण (θ) से जुड़ी हुई निकटतम भुजा।

2. त्रिकोणमितीय अनुपात (TRIGONOMETRIC RATIOS)

समकोण त्रिभुज ABC में कोण θ के लिए मुख्य 6 त्रिकोणमितीय अनुपात निम्नवत हैं:

अनुपात (Ratio)	संकेत	भुजाओं का सूत्र	याद रखने की ट्रिक (LAL / KAKKA)
Sine	$\sin\theta$	लंब / कर्ण (P / H)	**ल** / **क** (लंब बटा कर्ण)
Cosine	$\cos\theta$	आधार / कर्ण (B / H)	**आ** / **क** (आधार बटा कर्ण)
Tangent	$\tan\theta$	लंब / आधार (P / B)	**ल** / **आ** (लंब बटा आधार)
Cosecant	$\operatorname{cosec}\theta$	कर्ण / लंब (H / P)	1 / sin θ का व्युत्क्रम
Secant	$\sec\theta$	कर्ण / आधार (H / B)	1 / cos θ का व्युत्क्रम
Cotangent	$\cot\theta$	आधार / लंब (B / P)	1 / tan θ का व्युत्क्रम

शॉर्टकट सूत्र: $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$ $\cot\theta = \cos\theta / \sin\theta$

3. विशिष्ट कोणों की सारणी (TRIGONOMETRIC TABLE)

बोर्ड परीक्षा के लिए विभिन्न प्रमुख कोणों के मान याद रखना अति आवश्यक है:

अनुपात / कोण	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	1/2	1/√2	√3/2	1
cos θ	1	√3/2	1/√2	1/2	0
tan θ	0	1/√3	1	√3	अपरिभाषित (∞)
cosec θ	अपरिभाषित (∞)	2	√2	2/√3	1
sec θ	1	2/√3	√2	2	अपरिभाषित (∞)
cot θ	अपरिभाषित (∞)	√3	1	1/√3	0

4. त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (IDENTITIES) एवं रूप

सर्वसमिका 1

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

सर्वसमिका 2

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

सर्वसमिका 3

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$$

5. पूरक कोणों के सूत्र (COMPLEMENTARY ANGLES)

यदि दो कोणों का योग 90° हो (A + B = 90°), तो:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$
$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$
$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$

व्युत्क्रम संबंध (Reciprocal Relations):
$\sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1$ | $\cos\theta \times \sec\theta = 1$ | $\tan\theta \times \cot\theta = 1$

6. हल सहित उदाहरण (SOLVED EXAMPLES)

उदाहरण 1: (मान ज्ञात करना)

प्रश्न: यदि $\sin\theta = 3/5$ है, तो $\cos\theta$ और $\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

1. $\sin\theta$ = लंब / कर्ण = $3/5$. माना कि लंब (P) = 3 तथा कर्ण (H) = 5.
2. **पाइथागोरस प्रमेय से:** $H^2 = P^2 + B^2$

   $5^2 = 3^2 + B^2 \Rightarrow 25 = 9 + B^2 \Rightarrow B^2 = 16 \Rightarrow B = 4$ (आधार).
3. **अनुपात का मान:**

   $\cos\theta$ = आधार / कर्ण = $4/5$

   $\tan\theta$ = लंब / आधार = $3/4$

उदाहरण 2: (सिद्ध करने वाला प्रश्न)

प्रश्न: सिद्ध कीजिए कि $[\sin\theta/(1+\cos\theta)] + [(1+\cos\theta)/\sin\theta] = 2\,\text{cosec}\,\theta$

हल (Proof):

1. **बायाँ पक्ष (L.H.S.):** $[\sin\theta/(1+\cos\theta)] + [(1+\cos\theta)/\sin\theta]$
2. **लघुत्तम (LCM) लेने पर:**

   $= [\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2] / [\sin\theta(1+\cos\theta)]$
3. **विस्तार करने पर:** $(1+\cos\theta)^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$

   $= [(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 1 + 2\cos\theta] / [\sin\theta(1+\cos\theta)]$
4. **चूँकि** $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$**:**

   $= (1 + 1 + 2\cos\theta) / [\sin\theta(1+\cos\theta)] = [2(1+\cos\theta)] / [\sin\theta(1+\cos\theta)]$
5. **कटने के पश्चात्:** $= 2/\sin\theta = 2\,\text{cosec}\,\theta$ = **R.H.S. (इति सिद्धम्)**

परीक्षा उपयोगी टिप्स (Exam Tips):

- सिद्ध करने वाले प्रश्नों में सर्वप्रथम पदों को $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के पदों में बदलें।
- पूरक कोण वाले प्रश्नों में केवल एक कोण को ही रूपांतरित करें (जैसे 65° और 25° में से केवल एक को बदला जाता है)।